

Exercice 1 (4 points) :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{7}u_n + \frac{6}{7}, n \in \mathbb{N}$$

1) Calculer u_1 et u_2

2) a. Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

2.b. Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{6}{7}(1 - u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et en déduire que (u_n) est une suite décroissante.

3) On pose : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

3.a. Calculer v_0

3.b. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{7}$

3.c. Exprimer v_n en fonction de n

3.d. En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{7}\right)^n + 1$

3.e. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2 (4 points) :

Une boîte contient dix boules indiscernables au toucher, quatre boules blanches portant les numéros : 1, 1, 1, 2 et six boules noires portant les numéros : 1, 1, 1, 1, 1 et 2.

On tire simultanément au hasard deux boules de la boîte.

On considère les deux événements suivants :

A: «Les deux boules tirées sont noires»

B : «Les deux boules tirées portent le même numéro»

1) Calculer C_{10}^2

2) Calculer $p(A)$

3) Montrer que $p(B) = \frac{29}{45}$

4) Montrer que $p(A \cap B) = \frac{10}{45}$

5) Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules noires tirées.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	...	...	$\frac{15}{45}$

5.a. Copier et compléter le tableau ci-contre en justifiant les réponses.

5.b. Vérifier que $E(X) = \frac{54}{45}$

($E(X)$ est l'espérance mathématique de X)

Exercice 3 (8 points) :

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x - 1)^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

- 1) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique
- 2) a. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2.b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$)
- 2.c. Donner une interprétation géométrique du résultat.
- 3) a. Montrer que $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$
- 3.b. Etudier le signe de $(\ln x - 1)$ sur $]0; +\infty[$
- 3.c. Montrer que f est décroissante sur $]0; e]$ et elle est croissante sur $[e; +\infty[$
- 4) a. Montrer que $f''(x) = \frac{2(2 - \ln x)}{x^2}$ pour tout x de $]0; +\infty[$
- 4.b. En déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 4 (4 points) :

Dans la figure ci-dessous, (C) est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^x$

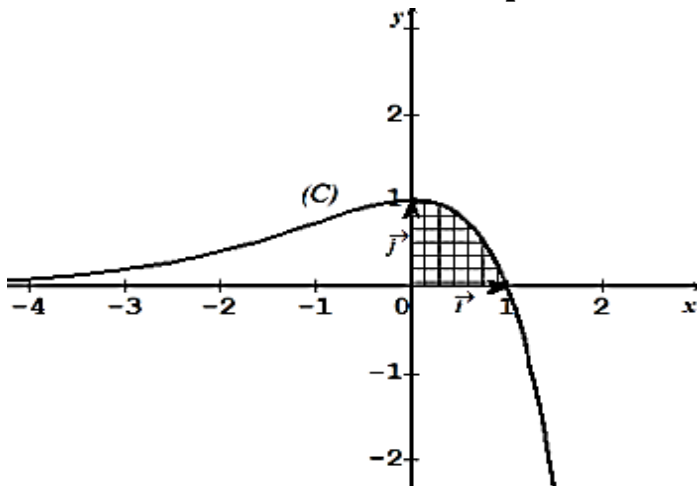
- 1) A partir du graphique ci-dessous, indiquer si chacune des propositions suivantes est vraie fausse : (Aucune justification n'est demandée)

- A. «L'équation : $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ »
- B. «L'inéquation : $g(x) \geq 2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ »
- C. «Pour tout x de $] - \infty; 0]$, $g'(x) \leq 0$ »
- D. «On a : $g([0; 1]) = [0; 1]$ »

2.a. Calculer $\int_0^1 e^x dx$

- 2) b. En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_0^1 x e^x dx = 1$

- 2.c. En déduire l'aire de la partie hachurée.



Correction de l'exercice 1 (4 points) :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{6}{7}, n \in \mathbb{N}$

1) Calculer u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{6}{7} = \frac{2}{2} + \frac{6}{7} = \frac{8}{7}$$

$$\text{et } u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{6}{7} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7} + \frac{6}{7} = \frac{8}{14} + \frac{6}{7} = \frac{8}{14} + \frac{12}{14} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$$

$$\text{D'où } u_1 = \frac{8}{7} \text{ et } u_2 = \frac{10}{7}.$$

2.a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1$

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$ donc $u_0 \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $u_n \geq 1$

Montrons que $u_{n+1} \geq 1$

D'après (HR) on a :

$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + \frac{6}{7} \geq \frac{1}{2} + \frac{6}{7} = \frac{13}{14} > 1$$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \geq 1$

2.b. Montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

une suite décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{6}{7} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + \frac{6}{7}$$

D'où Pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'après 2.a. on a :

Donc $\forall (n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n \leq 0$

Or $\forall (n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} \geq 1$

Par conséquent $\forall (n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - u_n \leq 0$

Alors (u_n) est une suite décroissante.

3. On pose $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3.a. Calculer v_0

$$\text{On a : } v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$$

3.b. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{7}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{6}{7} - 1 = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{7} \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 1) - \frac{1}{7} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{1}{2}v_n + \frac{5}{14} \end{aligned}$$

D'où la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

3.c. Exprimer v_n en fonction de n

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où : } \forall (n \in \mathbb{N}) : v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS

Contactez-nous

0681399067

(4 points) :

boules

; 1; 2 et

ros :

it au

considère les deux événements suivants :

A : «Les deux boules tirées sont noires»

B : «Les deux boules tirées portent le même numéro».

1. Calculer C_{10}^2

On a

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

2. Calculer $p(A)$ On a $A = \{NN\}$ donc

$$\text{card}A = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

$$\text{Alors } p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{15}{45}$$

$$\text{D'où } p(A) = \frac{1}{3}$$

3. Montrer que : $p(B) = \frac{29}{45}$ On a $B = \{11\}$ donc

$$\text{card}B = C_2^2 + C_8^2 = 1 + 28 = 29$$

$$\text{Alors } p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{29}{45}$$

$$\text{D'où } p(B) = \frac{29}{45}$$

4. Montrer que : p On a $A \cap B$ est l'év

boules noires por

$$\text{card}(A \cap B) = C_5^2$$

$$\text{D'où } p(A \cap B) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2}$$

Par suite $p(A \cap B)$ **5. Soit X la variabl**

au nombre de bou

5.a. Copier et com

en justifiant les ré

 $(X = 0)$ est l'évén

noire n'est tirée »

boules tirées sont

Alors $\text{card}(X = 0)$

$$\text{Donc } p(X = 0) = \frac{C_5^2}{C_{10}^2}$$

Or $p(X = 0) + p(X$

$$\text{Donc } p(X = 1) = \frac{C_5^1 C_5^1}{C_{10}^2}$$

$$= 1 -$$

Correction de l'exercice 3 (8 points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x - 1)^2$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) Justifier que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1)^2 = (-\infty)^2 = +\infty.$$

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, alors la courbe (C_f)

admet

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS

Contactez-nous

0681399067

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{15}{45}$

5.b. Vérifier que : $E(X) = \frac{54}{45}$

$$\text{On a } E(X) = \sum x_i p(X = x_i)$$

$$= 0 \times \frac{6}{45} + 1 \times \frac{24}{45} + 2 \times \frac{15}{45} = \frac{24}{45} + \frac{30}{45} = \frac{54}{45}$$

2.c. Donner une interprétation géométrique du résultat.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des abscisses.

3.a. Montrer que $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

Soit $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\ln x - 1) \times (\ln x - 1)' \\ &= 2(\ln x - 1) \times \frac{1}{x} = \frac{2(\ln x - 1)}{x} \end{aligned}$$

D'où $(\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$.

3.b. Etudier le signe de $(\ln x - 1)$ sur $]0, +\infty[$.

$$\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$$

$$\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > 1$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln x} > e^1 \Leftrightarrow x > e$$

$$\ln x - 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < e^{\ln x} < e^1 \Leftrightarrow 0 < x < e$$

On peut résumer le tableau de signe s

x	0
$\ln x - 1$	

3.c. Montrer que f est croissante et qu'elle est croissante

$$\text{On a } f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$$

$$\text{Puisque } \begin{cases} (\forall x \in]0, e[), f'(x) < 0 \\ (\forall x \in]e, +\infty[), f'(x) > 0 \end{cases}$$

$$(\forall x \in]0, e[), \frac{\ln x - 1}{x} < 0$$

D'où $(\forall x \in]0, e[), f$ est décroissante

$$\text{Puisque } \begin{cases} (\forall x \in [e, +\infty[), f'(x) > 0 \end{cases}$$

$$(\forall x \in [e, +\infty[), \frac{\ln x - 1}{x} > 0.$$

D'où $(\forall x \in [e, +\infty[), f'(x) > 0$.

Par conséquent la fonction f est croissante sur $[e, +\infty[$.

4.a. Montrer que $f''(x) = \frac{2(2 - \ln x)}{x^2}$

$$\text{Soit } x \in]0, +\infty[, \text{ on a : } f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } f''(x) &= 2 \frac{(\ln x - 1)'x - (\ln x - 1)(x)'}{x^2} \\ &= 2 \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x + 1}{x^2} = 2 \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \forall x \in]0, +\infty[, f''(x) = \frac{2(2 - \ln x)}{x^2}.$$

4.b. En déduire que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

$$\begin{cases} f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \\ f''(x) > 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < e^2 \\ f''(x) < 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2 \end{cases}$$

Donc f'' s'annule en e^2 et change de signe

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS

Contactez-nous

0681399067

ints):
courbe
normé
 $\mathbb{R}$ par:

$\frac{1}{2}$ x

,
ns
une

Justification n'est demandée

A : «L'équation : $g(x) = \frac{1}{2}$ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$ » **A : Fausse**

B : «L'inéquation : $g(x) \geq 2$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$ ». **B : Vraie**

C : « Pour tout x de $] - \infty, 0], g'(x) \leq 0$ ».

Fausse

D : «On a : $g([0, 1]) = [0, 1]$ » **D : Vraie.**

2.a. Calculer : $\int_0^1 e^x dx$

On a $\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$ car la fonction $x \mapsto e^x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto e^x$
D'où $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

2.b. En utilisant une intégration par parties,

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS
Contactez-nous
0681399067