

Exercice 1 (4 points) :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}, n \in \mathbb{N}$$

- 0,5 1) Calculer u_1 et u_2
- 1 2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$
- 3) On pose : $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
- 0,25 3.a. Calculer v_0
- 1 3.b. Calculer $v_{n+1} - v_n$ puis en déduire que (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$
- 0,5 3.c. Exprimer v_n en fonction de n
- 0,5 3.d. En déduire que $u_n = \frac{-2n+2}{2n+1}$
- 0,25 4) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

Exercice 2 (1 points) :

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

- 0,5 1) Déterminer $p(X = 0)$
- 0,5 2) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient quatre boules rouges et deux boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise deux boules de l'urne.

On considère les trois événements suivants :

A : «Les deux boules tirées sont rouges»

B : «La première boule tirée est noire et la deuxième est rouge»

C : « L'une des boules tirées est noire et l'autre est rouge»

- 0,75 1) Montrer que : $p(A) = \frac{2}{5}$
- 0,75 2) Montrer que : $p(B) = \frac{4}{15}$
- 0,75 3) Montrer que : $p(C) = \frac{8}{15}$
- 0,75 4) Les événements B et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Exercice 4 (12 points) :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$
et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) Justifier que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, puis donner une interprétation géométrique du résultat

0,5 2) .a. Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1 2.b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

1 3) .a. Montrer que $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

0,5 3.b. Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

1 3.c. Dresser le tableau de variations de f

0,5 4) .a. Calculer $f(-\ln 3)$

0,5 4.b. Déterminer l'image de l'intervalle $[-\ln 3; 0]$ par la fonction f

1 5) Déterminer l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$

1 6) .a. Montrer que $f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x + 1)^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

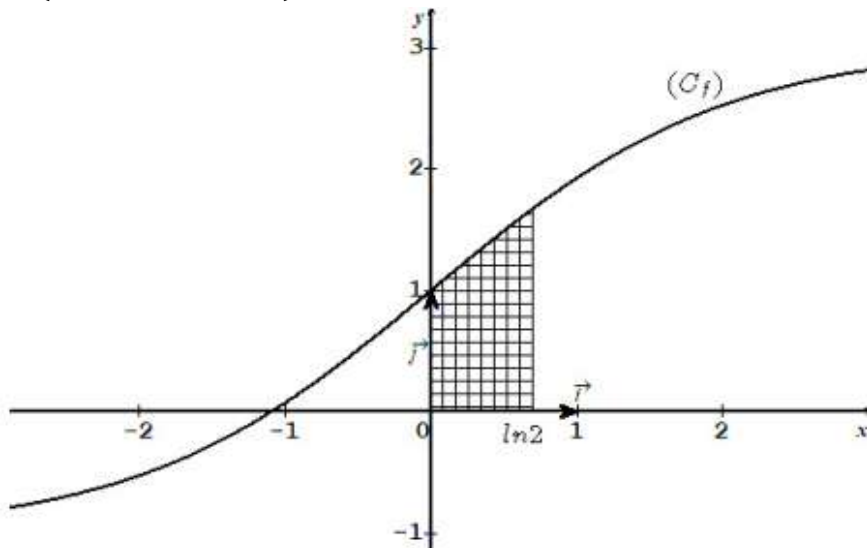
1,5 6.b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

7) Soit F la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = 4\ln(e^x + 1) - x$

1 7.a. Montrer que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

7.b. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe de f dans $(o; \vec{i}; \vec{j})$

Montrer que l'aire du domaine limité par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ (La partie hachurée) est égale à $(4\ln 3 - 5\ln 2)$ u.a



Correction de l'exercice 1 (3 points) :

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}, n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer u_1 et u_2

$$u_1 = \frac{u_0 - 2}{2u_0 + 5} = \frac{0 - 2}{2 \times 2 + 5} = 0. \text{ Donc } u_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{u_1 - 2}{2u_1 + 5} = \frac{0 - 2}{2 \times 0 + 5} = -\frac{2}{5}. \text{ Donc } u_2 = -\frac{2}{5}$$

2) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$ donc $u_0 > -1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (HR) : $u_n > -1$ et

montrons que $u_{n+1} > -1$

$$u_{n+1} + 1 = \frac{u_n - 2}{2u_n + 5} + 1 = \frac{u_n - 2 + 2u_n + 5}{2u_n + 5} = \frac{3u_n + 3}{2u_n + 5}$$

D'après (HR) on a

$2u_n + 5 > 0$ alors

D'où $u_{n+1} + 1 > 0$

Par conséquent $u_{n+1} > -1$

D'après le principe de récurrence, on a pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$

3. On pose : $v_n = \frac{1}{1 + u_n}$

a. Calculer v_0 .

$$v_0 = \frac{1}{1 + u_0} = \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

b. Calculer $v_{n+1} - v_n$
la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$

$$\text{Donc } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}$$

Alors la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

c. Exprimer v_n en fonction de n .

la suite (v_n) est arithmétique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{3}$.

$$\text{Alors } v_n = v_0 + \frac{2}{3}n = \frac{1}{3} + \frac{2n}{3}$$

$$\text{Donc } v_n = \frac{2n+1}{3}$$

d. En déduire que $u_n = \frac{-2n+2}{2n+1}$

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS
Contactez-nous
0681399067

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{1 + u_{n+1}} - \frac{1}{1 + u_n}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{u_n - 2}{2u_n + 5}} - \frac{1}{1 + u_n}$$

$$= \frac{2u_n + 5}{3(u_n + 1)} - \frac{1}{1 + u_n}$$

$$= \frac{2u_n + 5 - 3}{3(u_n + 1)} = \frac{2(u_n + 1)}{3(u_n + 1)} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{-2}{2} = -1$$

$$(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0).$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1.$$

Correction de l'exercice 2(1 points):

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau ci-dessous.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

1) Déterminer $p(X = 0)$

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = 1$$

$$\Leftrightarrow p(X = 0) + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow p(X = 0) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } p(X = 0) = \frac{1}{2}$$

2) Calculer $E(X)$ l'espérance de la variable aléatoire

$$E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2)$$

$$= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{3}{8}$$

$$\text{Donc } E(X) = \frac{7}{8}$$

Correction de l'exercice 3:

Une urne contient deux boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise de l'urne. On consigne les résultats suivants :

A : "Les deux boules tirées sont noires"

B : "La première boule tirée est noire et la deuxième est rouge"

C : "L'une des boules tirées est noire et l'autre est rouge"

1) Montrer que $p(A) = \frac{2}{5}$.

Puisque le tirage est successif et sans remise alors chaque possibilité est un arrangement de 2 boules parmi 6,

$$\text{Donc Card } \Omega = A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5 = 30.$$

$$\text{Et on a } \text{card} A = A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \times 3 = 12.$$

$$\text{Donc } p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{D'où } p(A) = \frac{2}{5}.$$

2) Montrer que $p(B) = \frac{4}{15}$.

$$\text{On a : } \text{card} B = 2 \times 4 = 8.$$

$$\text{Donc } p(B) = \frac{\text{card} B}{\text{card } \Omega} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

$$\text{D'où } p(B) = \frac{4}{15}.$$

3. Montrer que $p(C) = \frac{8}{15}$.

$$\text{card} C = C_2^1 \times A_2^1 \times A_4^1 = 2 \times 2 \times 4 = 16.$$

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS

Contactez-nous

0681399067

$$B) = \frac{4}{15}.$$

pas

sl:

e f

donner

résultat.

-1,

$$\text{D'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1.$$

Par conséquent la courbe (C_f) admet une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$ d'équation $y = -1$.

2. a. Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{3(e^x + 1) - 4}{e^x + 1} \\ &= \frac{3(e^x + 1)}{e^x + 1} - \frac{4}{e^x + 1} \\ &= 3 - \frac{4}{e^x + 1} \end{aligned}$$

D'où $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ puis donner une interprétation géométrique du résultat.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$$

(car $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{e^x + 1} = 0$)

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

Par conséquent la droite d'équation $y = 3$ est une asymptote horizontale de la fonction f .

3. a. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3e^x - 1)'(e^x + 1) - (3e^x - 1)(e^x)'}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{3e^x(e^x + 1) - (3e^x - 1)e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

On a $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et $(e^x + 1)^2 > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

D'où $\frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$. Par conséquent $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. Dresser le tableau de variation de f .

Tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	3

4. a. Calculer $f(-\ln 3)$.

$$\begin{aligned} f(-\ln 3) &= \frac{3e^{-\ln 3} - 1}{e^{-\ln 3} + 1} = \frac{\frac{3}{\ln 3} - 1}{\frac{1}{\ln 3} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $f(-\ln 3) = 0$

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS
Contactez-nous
0681399067

le

$\frac{2}{2} = 1$ et
t

$[0, 1]$.
 $0, 1]$.
ente à

de (C_f)

our tout

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4e^x)'(e^x + 1)^2 - 4e^x \times 2e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \\ &= \frac{4e^x(e^x + 1)(e^x + 1 - 2e^x)}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3} \end{aligned}$$

D'où $f''(x) = \frac{4e^x(1 - e^x)}{(e^x + 1)^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b. En déduire que (C_f) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

On a $f''(x) = \frac{4e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}$ et puisque

$\begin{cases} 4e^x > 0 \\ (e^x + 1)^3 > 0 \end{cases}$, alors $f''(x)$ a le même signe que $1 - e^x$. et on a :

$$1 - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Et } 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$$

D'où le tableau de signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^x$			
$f''(x)$			

D'après le tableau déduit que f'' s'annule en $x=0$ et change de signe et par conséquent f admet un point d'inflexion. Le point $I(0, 1)$ est sur la courbe (C_f).

7. Soit F la fonction primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.

a. Montrer que la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $F'(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$F'(x) = 4 \frac{(e^x + 1)}{e^x + 1} = 4$$

$$= \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1} = 3$$

$$\text{Donc } F'(x) = f(x)$$

Alors F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de f dans ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

Montrer que l'aire du domaine limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$ (La partie hachurée) est égale à $(4\ln 3 - 5\ln 2) \text{ u.a.}$

Dans le graphique on constate que la partie de la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, \ln 2]$ est au dessus de l'axe des abscisses, donc $f(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, \ln 2]$, par conséquent l'aire du domaine hachuré est

$$A = \left(\int_0^{\ln 2} f(x) dx \right) u \cdot a.$$

$$= [F(x)]_0^{\ln 2}$$

$$= (F(\ln 2) - F(0)) u \cdot a$$

$$= (4\ln 3 - 5\ln 2) u \cdot a.$$

$$a.$$

$$a..$$

LA suite de la
correction dans
le livre FMATHS

Contactez-nous

0681399067